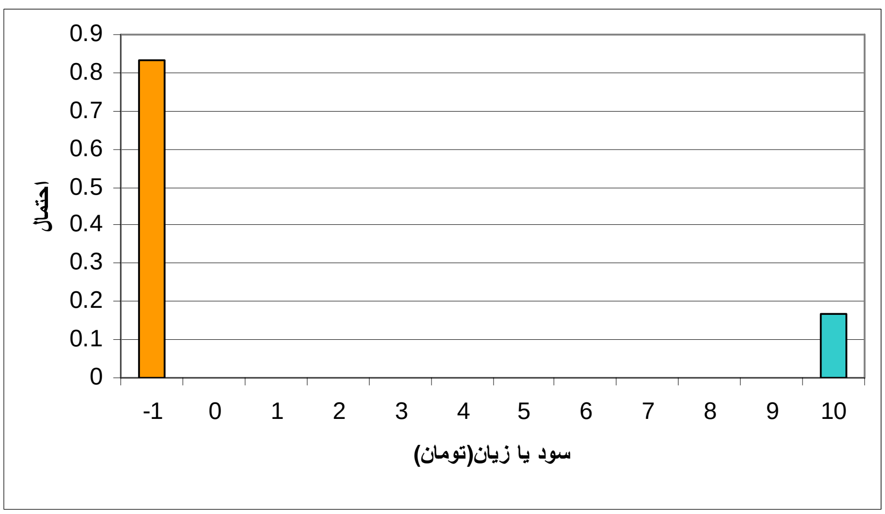
قضیهٔ حد مرکزی و کاربردهای آن در مدیریت مالی[۱]

سعید اسلامی بیدگلی

چکیده: در بسیاری از تحقیقات مالی توزیع داده‌ها نرمال فرض می‌شود. همچنین در بسیاری تحقیقات دیده‌ایم که از لگاریتم بازده و یا قیمت استفاده شده است. علت چنین مسئله‌ای را باید در قضیهٔ حدمرکزی جستجو کرد. در ادامه یادداشت‌های ریاضیات مالی، در این نوشته مروری خواهم داشت بر مفهوم قضیهٔ حد مرکزی[۲] *و کاربردهای آن در مدیریت مالی. همچنین محدودیت‌های استفاده از این قضیه را هم به اجمال توضیح خواهم داد.*

قضیهٔ حد مرکزی: توزیع میانگین تعداد زیادی متغیر تصادفی، نرمال (یا به طور کلی متقارن) است حتی اگر توزیع خود متغیرها نرمال نباشد.

مثال: فرض کنید قرار است یک تاس را پرتاب کنید. اگر نتیجهٔ پرتاب شما ۶ بود شما ۱۰ تومان دریافت می‌کنید و در غیر این‌صورت باید ۱ تومان پرداخت کنید. این یک توزیع دارای چولگی است. (شکل ۱)



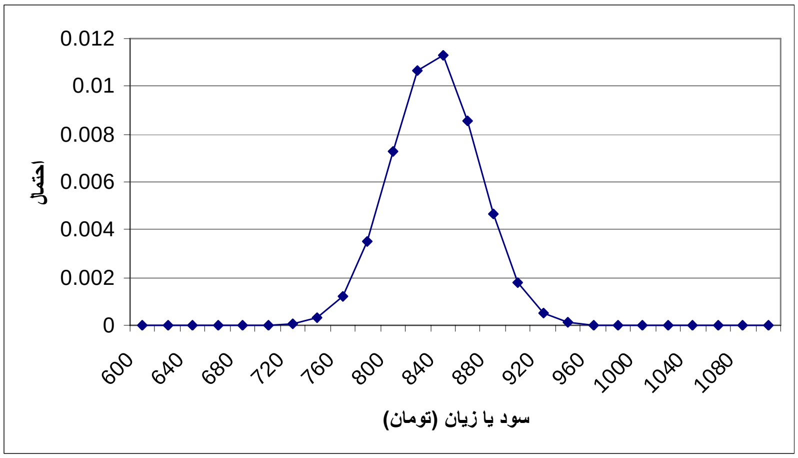
شکل ۱

---

۱. توضیح۱: این مقاله در شماره ۱۲ نشریه الکترونیکی متسا به چاپ رسیده است.
توضیح۲: بخش زیادی از مطالب این نوشته برگرفته از کتاب FAQs in Quantitative Finance نوشته Paul Wilmott می‌باشد.

۲. Central Limit Theorem

اما بر اساس قضیهٔ حد مرکزی اگر همین بازی را هزاران بار تکرار کنید توزیع سود انتظاری شما نرمال خواهد بود. (شکل۲)



شکل ۲

برای توضیح بیشتر فرض کنید که X_i (i=۱،۲,...n) دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل است که از توزیع همسان برخوردارند (i.i.d[۳]) و میانگین (m) و انحراف معیار(s) متناهی[۴] دارند. مجموع این متغیرها به صورت زیر است:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

S_n دارای میانگین nm و انحراف معیار $s\sqrt{n}$ است. قضیهٔ حد مرکزی اشاره دارد که اگر n بزرگ شود؛ آن‌گاه S_n به سمت توزیع نرمال میل خواهد کرد. به‌عبارت دیگر متغیر زیر دارای توزیع نرمال استاندارد (با میانگین صفر و واریانس یک) خواهد بود:

$$\overline{S} = \frac{S_n - mn}{s\sqrt{n}}$$

اجازه بدهید به همان مثال تاس برگردیم. میانگین و واریانس سود انتظاری برای یک پرتاب به روش زیر محاسبه خواهد شد:

میانگین: $\frac{1}{6}\times 10 + \frac{5}{6}\times(-1) = \frac{5}{6} \approx 0.833$

واریانس: $\frac{1}{6}\times(10-\frac{5}{6})^2 + \frac{5}{6}\times(-1-\frac{5}{6})^2 = \frac{605}{54} \approx 11.203$

---

[۳] . Independent & identically distributed

[۴] . Finite

بنابراین انحراف معیار این توزیع $\sqrt{605/54} \approx 1.97$ خواهد بود.

حالا فرض کنید ما بخواهیم توزیع سود انتظاری را برای هزار بار پرتاب محاسبه کنیم. این بار میانگین و انحراف معیار به طریق زیر محاسبه خواهد شد.

میانگین: $1000 \times \frac{5}{6} \approx 833.3$

انحراف معیار: $\sqrt{1000 \times \frac{605}{54}} \approx 34.7$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید رشد انحراف معیار کمتر از میانگین است و این به دلیل وجود ریشه دوم در فرمول انحراف معیار است.

در تحقیقات مالی بسیاری اوقات فرض می‌کنیم که توزیع بازده دارایی‌ها نرمال است (هر چند در ادامه اشاره خواهیم کرد که این فرض توسط محققین بسیاری زیر سوال رفته است.) این بدان دلیل است که بازده دارایی در یک دوره زمانی (مثلا یک روز) حاصل معاملات زیادی در بازه‌های زمانی کوچکتر است. به این ترتیب با استفاده از قضیهٔ حد مرکزی حتی اگر بازده دارایی در آن بازه‌های زمانی کوچکتر از توزیع نرمال پیروی نکنند، می‌توان فرض کرد که مجموع این بازده‌ها (بازده در یک دوره بزرگتر) دارای توزیع نرمال است. به همین دلیل در بسیاری از تحقیقات مالی به راحتی فرض می‌کنیم که داده‌ها از توزیع نرمال برخوردارند.

برای استفاده از قضیهٔ حد مرکزی باید به شرایط آن نیز توجه کرد. قضیهٔ حد مرکزی زمانی کاربرد دارد که:

- مقادیر تصادفی از یک توزیع باشند.
- مقادیر مستقل از هم باشند.
- و توزیع مقادیر دارای میانگین و انحراف معیار متناهی باشد.

بدیهیست که داده‌های مالی همه این شرایط را ندارند (و در واقع هیچکدام را ندارند.) به‌خصوص وقتی در مورد داده‌های غیر نرمال صحبت می‌کنیم بهترین توزیع، توزیع‌های با واریانس نامحدود (نامتناهی) هستند. این باعث می‌شود که نتوانیم از خواص توزیع نرمال و قضیهٔ حد مرکزی استفاده کنیم. این موضوع اگرچه برای محققینی که قصد مدل‌سازی واقعی‌تری از داده‌های مالی را دارند جذاب است؛ اما تحقیقات مالی را که طی دهه‌های گذشته صورت گرفته بود و در آن‌ها نوسان‌پذیری به عنوان شاخصی از ریسک مورد مطالعه واقع شده بود، زیر سؤال می‌برد.

با این حال هنوز می‌توان برخی از این سه شرط را تا حدی آزاد کرد و همچنان از خواص قضیهٔ حد مرکزی استفاده کرد. برای مثال این‌که توزیع متغیرهای تصادفی کاملا یکسان باشد ضروری نیست

(برای nهای بزرگ). این به آن دلیل است که هرکدام از متغیرها تاثیر کوچکی بر مجموع دارد. همچنین در صورت وجود همبستگی ضعیف بین متغیرها، همچنان می‌توان از این قضیه استفاده کرد.
محققین بسیاری به چولگی توزیع بازدهی اشاره دارند که مهمترین آن‌ها فاما، فیشر، جنسن و رول[۵](۱۹۶۹) و مندلبرات[۶] (۱۹۶۳) می‌باشد. مندلبرات در تحقیق معروف خود به نامتناهی بودن (بزرگ بودن) انحراف معیار بازده اشاره کرد و همین تحقیق موجب افزایش کاربرد توزیع لِوی[۷] در تحقیقات مالی شد.
نکته پایانی که در این نوشتار به آن خواهم پرداخت، بحث لاگ‌نرمال[۸] است. لگاریتم عددهای تصادفی خود تصادفی خواهد بود (فرض می‌کنیم عددهای تصادفی مثبت بوده‌اند.) بنابراین مجموعی از لگاریتم‌های مقادیر تصادفی طبق قضیۀ حد مرکزی توزیع نرمال خواهد داشت. مجموع لگاریتم‌های یکسری عدد معادل لگاریتم حاصلضرب آن مقادیر است که همانطور که در بالا گفته شد نرمال خواهد بود. این همان مفهوم لاگ‌نرمال است. این مفهوم مهمی در تحقیقات مالی است. زیرا این‌گونه فرض می‌شود که قیمت یک دارایی در زمان t معادل قیمت آن در یک زمان اولیه (t=۰) ضرب در تعداد زیادی عدد تصادفی (به عنوان بازده دوره‌های کوچکتر زمانی) است. بنابراین بازده دوره‌های زمانی هر چه باشد توزیع لگاریتم قیمت سهم نرمال خواهد بود. بر این اساس بازده سهام (در یک بازه زمانی به اندازه کافی طولانی) توزیع نرمال و قیمت سهام توزیع لاگ‌نرمال خواهد داشت.
فاما، فیشر، جنسن و رول در تحقیق خود به همین وجه از Ln (لگاریتم طبیعی یا لگاریت در پایه نپر) اشاره کرده‌اند و علیرغم نرمال بودن توزیع لگاریتم، به مفهوم بازده مرکب پیوسته که در Ln وجود دارد پرداخته‌اند و مفهومی اقتصادی (علاوه بر توجیه ریاضی) برای لگاریتم گیری پیدا کرده‌اند.
فراموش نکنیم که بزرگی n در نرمال بودن توزیع میانگین تاثیر دارد. همچنین محققین بسیاری بر چولگی توزیع بازده تاکید کرده‌اند و مفاهیم ریسک نامطلوب در همین راستا ایجاد شده است. پایه و اساس این تحقیقات بر نامتناهی بودن واریانس توزیع بازدهی قرار دارد. در این حالت قضیۀ حد مرکزی قابلیت کاربرد خود را از دست خواهد داد و از توزیع‌های دیگر از جمله لِوی (که در نوشته‌ای دیگر به آن خواهم پرداخت.) استفاده خواهد شد. مسئله نرمال بودن داده‌ها از جمله مشکلات بزرگ تحقیقات مالی در ایران است که باید مورد مداقۀ بیشتری قرار بگیرد.

---
۵ . Fama, Fisher, Jensen and Roll
۶ . Mandelbrot
۷ . Levy Distribution
۸ . Lognormal