

یادداشت‌های ریاضی مالی (۴)

رابطه تعادلی اختیار خرید-اختیار فروش^۱

سعید اسلامی بیدگلی*

رابطه تعادلی اختیار خرید-اختیار فروش در حقیقت رابطه بین قیمت اختیار خرید اروپایی و اختیار فروش اروپایی است در شرایطی که هر دو دارای یک قیمت توافقی و یک تاریخ سررسید باشند. از این طریق با داشتن قیمت یکی، قیمت دیگری به دست می‌آید.

در یادداشت سوم ریاضی مالی (آربیتراژ، فرصت آربیتراژی و قیمت‌گذاری دارایی‌ها) مثال ساده‌ای از رابطه تعادلی اختیار خرید-اختیار فروش^۲ آوردیم. در این نوشته قصد داریم کمی مفصل‌تر در این باره بنویسیم.

پیش از آغاز بحث در مورد رابطه تعادلی مذکور، چند مفهوم مقدماتی از اختیار خرید و اختیار فروش (برای دوستانی که آشنایی کمتری دارند) ذکر می‌شود و سپس به مبحث اصلی (رابطه تعادلی اختیار خرید-اختیار فروش) باز خواهیم گشت.

اختیار خرید^۳: اختیار خرید قراردادی است که به موجب آن دارنده اختیار خرید می‌تواند در تاریخ مشخصی از آینده (تاریخ سررسید یا انقضای^۴) دارایی خاصی (که دارایی پایه^۵ خوانده می‌شود) را با قیمت توافقی^۶ (که امروز تعیین می‌شود) خریداری کند.

خریدار اختیار خرید برای دریافت چنین حقی (که یک دارایی را در صورتی که به نفعش باشد به قیمت خاص از پیش تعیین شده‌ای خریداری کند) مبلغی را پرداخت می‌کند که به قیمت اختیار خرید^۷ معروف است و فروشنده اختیار، آن را دریافت می‌کند. نکته قابل توجه این است که دارنده اختیار خرید، اجباری به اعمال حق خود ندارد اما اگر تصمیم گرفت اختیار خود را اعمال کند فروشنده مجبور است که دارایی مورد نظر را به قیمت تعیین شده بفروشد.

به این ترتیب اگر قیمت دارایی در تاریخ سررسید بالاتر از قیمت توافقی باشد دارنده اختیار خرید، اختیار خود را اعمال کرده دارایی را با قیمت K خریداری می‌کند و می‌تواند آن را در بازار با قیمت S (که $S > K$) بفروشد و معادل $S - K$ سود کند (البته برای دریافت این سود قبلاً مبلغ اختیار خرید C) را پرداخت کرده است. و اگر $S < K$ دارنده اختیار خرید از حق خود می‌گذرد و مبلغ اختیار خرید را زیان کرده است. به این ترتیب سود دارنده اختیار خرید در تاریخ سررسید مطابق با نمودار زیر تعیین می‌شود:

۱. این مقاله در شماره ۱۹ نشریه الکترونیکی متسا به چاپ رسیده است.

۲. Put-Call Parity

۳. Call Option

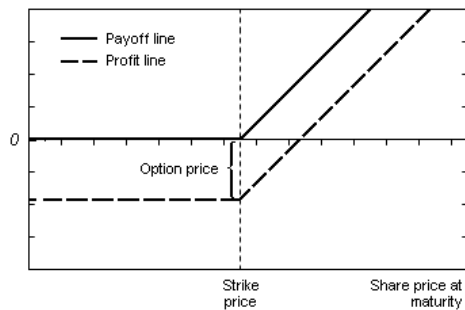
۴. Expiration date (expiry)

۵. Underlying asset

۶. Strike Price

۷. Call Premium

شکل ۱- سود و زیان دارنده (خریدار) اختیار خرید



یعنی تا وقتی که قیمت دارایی زیر قیمت توافقی است اختیار اعمال نمی‌شود و دارنده اختیار معادل مبلغ پرداختی زیان کرده است. اگر قیمت بازار دارایی بالاتر از قیمت توافقی باشد، اختیار خرید اعمال می‌شود اما تا قیمت $(S=K+C)$ دارنده اختیار همچنان زیان می‌کند و اگر $S > K+C$ شد، دارنده اختیار خرید وارد مرحله سود می‌شود. بنابراین ارزش اختیار خرید در تاریخ سررسید برابر است با $\text{Max}(0, S-K)$. یعنی اگر قیمت بازار بالاتر از قیمت توافقی بود اختیار ارزشمند است، در غیر این صورت، ارزش آن برابر صفر است و اعمال نمی‌شود.

بدیهیست که وضعیت سود و زیان فروشنده اختیار برعکس خواهد بود.

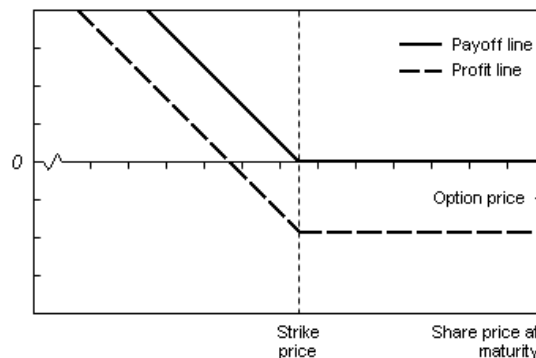
اختیار فروش^۸: اختیار فروش، قراردادی است که به موجب آن دارنده اختیار می‌تواند در تاریخ مشخصی از آینده (تاریخ سررسید) دارایی خاصی (دارایی پایه) را با قیمت توافقی (که امروز تعیین می‌شود) بفروشد. خریدار اختیار فروش برای دریافت چنین حقی (که یک دارایی را در صورتی که به نفعش باشد به قیمت خاص از پیش تعیین شده‌ای به طرف مقابل بفروشد) مبلغی را پرداخت می‌کند که به قیمت اختیار فروش^۹ معروف است و فروشنده اختیار، آن را دریافت می‌کند. باز هم دارنده اختیار این حق را دارد که از اختیار خود استفاده کند یا نکند.

در این جا اگر در تاریخ سررسید قیمت بازار دارایی پایین‌تر از قیمت توافقی بود، دارنده اختیار به جای این که دارایی خود را در بازار با قیمت S بفروشد، دارایی را با قیمت K (که بزرگتر از S است) به فروشنده اختیار می‌فروشد و در غیر این صورت اختیار خود را اعمال نمی‌کند. بنابراین سود و زیان اختیار فروش در تاریخ سررسید به شکل زیر خواهد بود:

^۸ . Put Option

^۹ . Put Premium

شکل ۲- سود و زیان دارنده (خریدار) اختیار فروش



ارزش اختیار فروش هم در تاریخ سررسید $\text{Max}(0, K-S)$ است (کمی فکر کنید).

در هر دو اختیار معامله (خرید یا فروش) گفته می‌شود که دارنده (خریدار) اختیار در وضعیت Long قرار دارد و فروشنده اختیار در وضعیت Short.

اختیار معامله اروپایی و آمریکایی

اختیار معامله اروپایی فقط در تاریخ سررسید قابل اعمال است در حالی که اختیار معامله آمریکایی در هر زمانی از انعقاد قرارداد تا تاریخ سررسید قابل اعمال است.

رابطه تعادلی اختیار خرید-اختیار فروش

رابطه تعادلی اختیار خرید-اختیار فروش در حقیقت رابطه بین قیمت اختیار خرید اروپایی و اختیار فروش اروپایی است در شرایطی که هر دو دارای یک قیمت توافقی و یک تاریخ سررسید باشند. از این طریق با داشتن قیمت یکی، قیمت دیگری به دست می‌آید. این رابطه به صورت زیر است (از راست بخوانید):

$$\text{قیمت اختیار خرید} + \text{ارزش فعلی قیمت توافقی} = \text{قیمت سهم} + \text{قیمت اختیار فروش}$$

فرض کنید قیمت سهمی ۹۸ تومان است. قیمت اختیار اروپایی روی این سهم با قیمت توافقی ۱۰۰ تومان و تاریخ انقضای ۹ ماه آینده، ۹/۰۷ تومان است. نرخ بهره ۴/۵٪ است. قیمت اختیار فروش با همان قیمت توافقی و همان تاریخ انقضا به طریق زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{ارزش اختیار فروش} = 9.07 - 98 + 100e^{-0.045 \times 0.75} = 7.75$$

عامل $e^{-0.045 \times 0.75}$ عامل تنزیل نه ماهه (۰/۷۵ سال) با نرخ ۴/۵٪ است. فرض شده است که به صورت پیوسته مرکب می‌شود.^{۱۰}

^{۱۰} . Continuous Compounding

تبیین رابطه تعادلی اختیار خرید-اختیار فروش

برای تبیین این رابطه از همان فرصت آربیتراژی استفاده می‌کنم. فرض کنید دو پورتفولیو داریم. پورتفولیوی اول شامل اختیار خرید (با قیمت توافقی K و تاریخ سررسید t) و مقداری اوراق قرضه (که ارزش آن در تاریخ سررسید و با نرخ تنزیل بدون ریسک، K است) داریم. به این ترتیب ارزش فعلی اوراق قرضه معادل Ke^{-ixT} است که در آن i نرخ بهره بدون ریسک و t زمان تا سررسید است. پورتفولیوی دوم هم شامل یک سهم (همان سهمی که دارایی پایه اختیار معامله‌هاست) و یک اختیار فروش با همان تاریخ انقضا و قیمت توافقی (K) می‌باشد.

فارغ از این که قیمت سهم مورد نظر در تاریخ انقضا چقدر باشد ارزش این دو پورتفولیو یکسان خواهد بود. برای توضیح بیشتر فرض کنید که قیمت سهم (S) کمتر از قیمت توافقی (K) باشد. در این صورت در پورتفولیوی اول اختیار خرید ارزشی معادل صفر خواهد داشت و اوراق قرضه هم ارزشی معادل K و در نتیجه ارزش کل پورتفولیو K خواهد بود. در پورتفولیوی دوم ارزش سهم S خواهد بود و ارزش اختیار فروش $K-S$ و این پورتفولیو در مجموع معادل K ارزش خواهد داشت که با پورتفولیوی اول برابر است. بسیار ساده می‌توانید به نتیجه برسید که اگر $S > K$ باشد هر دو پورتفولیو ارزشی معادل S خواهند داشت. چون تحت هر شرایطی ارزش آینده این دو پورتفولیو یکسان خواهد بود طبق قانون تک قیمتی (که در یادداشت پیشین به آن اشاره کردم) ارزش حال این دو پورتفولیو نیز باید یکسان باشد. یعنی:

$$C + Ke^{-ixT} = P + S_0$$

و این همان رابطه تعادلی اختیار خرید-اختیار فروش است. در این رابطه S_0 قیمت سهم در زمان صفر است. این رابطه تا دوره سررسید برقرار است. برای مثال اگر در زمان t باشیم و به اندازه $T-t$ به سررسید مانده باشد داریم:

$$C_t + Ke^{-i(T-t)} = P_t + S_t$$

اگر این رابطه تعادلی برقرار نباشد می‌توان با خرید پورتفولیوی ارزان و فروش پورتفولیوی گران‌تر سود به دست بیاوریم، چون این دو پورتفولیو در سررسید، ارزش یکسان دارند. این رابطه را به شیوه‌های مختلف نشان می‌دهند مثلاً:

$$C - S = P - Ke^{i(T-t)}$$

که در آن $T-t$ زمان مانده تا سررسید است. علامت منفی پشت هر کدام از ابزارهای مالی (در معادله بالا پشت سهام) به معنای فروش آن ابزار است. (موقعیت Short)

زیبایی این رابطه تعادلی اختیار خرید-اختیار فروش در این است که این رابطه تعادلی، مستقل از مدل است. یعنی به چگونگی رفتار قیمت سهام مربوط نیست. این درحالی است که ارزش خود اختیار خرید و فروش به این رفتار (و به خصوص نوسانات قیمت سهام) وابسته است. چنین استقلالی از مدل در موارد کمی در مدیریت مالی دیده می شود که از آن جمله می توان به رابطه بین قیمت قرارداد آتی^{۱۱} و قیمت دارایی پایه و همچنین رابطه بین اوراق قرضه^{۱۲} و قراردادهای تاخت^{۱۳} اشاره کرد.

* دانشجوی دکتری مدیریت مالی

^{۱۱} . Forward Price

^{۱۲} . Bonds

^{۱۳} . SWAPs